Solution : Optimal Transport Exam

Exercice 1

Données :

- μ : mesure de Lebesgue sur $[0, 1]$.
- ν : mesure de Borel définie par :

$$\int_{[0,1]} f(y)\nu(dy) = (1-\alpha)\int_0^1 f(y)dy + \alpha f(1), \quad \forall f \in C(\mathbb{R}),$$

  avec $\alpha \in [0, 1]$.

  Questions :

1. Trouver l'application de transport optimale T qui envoie μ sur ν.
2. Identifier les valeurs de α pour lesquelles $T : [0, 1] \to [0, 1]$ est :
   - (a) lisse (smooth),
   - (b) injective (one-to-one).

Solution

1. Construction de T L'application optimale T est obtenue en résolvant le problème de Monge avec un coût quadratique $c(x, y) = |x - y|^2$. Cela revient à garantir que $(T_{\#}\mu = \nu)$.

1. **Fonction de répartition cumulative :**
   - μ : $C_\mu(x) = x$, $x \in [0, 1]$.
   - ν : $C_\nu(y) = \begin{cases} (1-\alpha)y, & y \in [0,1), \\ 1, & y = 1. \end{cases}$
2. **Relation entre C_μ et C_ν :**

$$C_\nu(T(x)) = C_\mu(x) \implies T(x) = \begin{cases} \frac{x}{1-\alpha}, & x \in [0, 1-\alpha), \\ 1, & x \in [1-\alpha, 1]. \end{cases}$$

2. Analyse de T

1. **Lissité :** T est lisse si $\alpha = 0$. Pour $\alpha > 0$, il y a un saut à $x = 1 - \alpha$.
2. **Injectivité :** T est injective si $0 \leq \alpha < 1$. Pour $\alpha = 1$, $T(x) = 1$ pour tout $x \in [0, 1]$.

Exercice 2

Données :

- μ : mesure de Lebesgue sur $[0,1]^2$.
- $T(x,y) = (\sqrt{x}\cos(2n\pi y), \sqrt{x}\sin(2n\pi y))$, avec $n \in \mathbb{N}$.

Questions :

1. Trouver la mesure image $\nu = T_{\#}\mu$.
2. Trouver les valeurs de n pour lesquelles :
   - (i) T est un transport optimal,
   - (ii) ν est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue.

Solution

1. Mesure image ν L'application $T(x,y)$ correspond à un changement de coordonnées polaires :

- $r = \sqrt{x}$,
- $\theta = 2n\pi y$.

Le Jacobien est :

$$J_T(x,y) = n\pi.$$

Ainsi, ν est proportionnelle à la mesure de Lebesgue sur le disque unité $\mathbb{D}$ avec une densité $n\pi$.

2. Analyse des propriétés

1. **Optimalité :** T est un transport optimal si $n \geq 1$ ($J_T > 0$).
2. **Continuité absolue :** ν est absolument continue si $n \geq 1$.

Problème Principal

Données :

- D : cube unité dans $\mathbb{R}^d$.
- $\gamma_0(x)$, $\gamma_1(x)$: fonctions densités sur D, avec $\int_D \gamma_0(x)dx = \int_D \gamma_1(x)dx = 1$.
- Fonctionnelle :

$$B_T[f] = \int_Q (f(1,x)\gamma_1(x) - f(0,x)\gamma_0(x))\, dx,$$

  avec $Q = [0,1] \times D$.

Question 1 : Existence de mesures (c, m)

- Dualité de Rockafellar : le problème convexe peut être récrit avec des mesures (c, m), où :

$$m(dt, dx) = v(t,x)c(dt, dx),$$

  et $v \in L^2(Q, c; \mathbb{R}^d)$.
- Energie cinétique :

$$J = \int_Q \frac{1}{2}|v(t,x)|^2 dc(t,x) + K^*[c],$$

  avec K^* le transformé de Legendre-Fenchel de K.

Question 2 : γ, v et système d'équations

- **Équation de continuité :**

$$\partial_t \gamma(t,x) + \nabla_x \cdot (\gamma(t,x) v(t,x)) = 0.$$

- **Dynamique :**

$$\partial_t v(t,x) + (v(t,x) \cdot \nabla_x) v(t,x) = E(t,x).$$

- Conditions aux bords :

$$\gamma(0,x) = \gamma_0(x), \quad \gamma(1,x) = \gamma_1(x).$$

Question 3 : Cas particulier $K(\theta) = \int_Q \exp(\theta)$

- Transformé de Legendre-Fenchel :

$$\theta(t,x) = \log(\gamma(t,x)).$$

- Unicité : γ et v sont uniques car θ est une fonction strictement croissante de γ.